

Целочисленная арифметика.

Делители числа. Числа простые и составные.

Теория чисел — раздел математики, занимающийся изучением чисел непосредственно как таковых, их свойств и поведения в различных ситуациях. Достаточно сложно дать полное определение теории чисел, т.к. точного определения и не существует вовсе. Мы же будем рассматривать только ту ее часть, которая используется при решении олимпиадных задач. В большей степени будем уделять внимание целым числам. Для этого определим некоторые разновидности чисел ...

Множество всех целых чисел обычно обозначают буквой Z и понимают под ним набор всех действительных чисел без дробной части: $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Натуральные числа являются подмножеством целых чисел и образуют множество N : $\{1, 2, 3, \dots\}$.

Простым числом называют натуральное число, большее единицы, которое делится только на 1 и на само себя. Все остальные числа называют составными. Первые 10 простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и 29.

Перечислим несколько свойств простых чисел:

- любое составное число представляется уникальным образом в виде произведения простых чисел; иначе еще говорят, что разложение числа на простые множители однозначно.
- простых чисел бесконечно много, причем существует примерно $n/\ln(n)$ простых чисел, меньших числа n .
- наименьший простой делитель составного числа n не превышает \sqrt{n} , поэтому для проверки простоты числа достаточно проверить его делимость на 2 и все нечетные (а еще лучше простые) числа, не превосходящие \sqrt{n} .
- любое четное число, большее двух представимо в виде суммы двух простых чисел; а любое нечетное, большее чем 5 представимо в виде суммы трех простых чисел
- для любого натурального n , большего единицы существует хотя бы одно простое число на интервале $(n, 2*n)$

Задача №23 Гадание

(Время: 1 сек. Память: 16 Мб Сложность: 13%)

Как и многие другие девочки, Маша любит разные гадания. Некоторое время назад Маша узнала новый способ гадать на числах – для какого-нибудь интересующего ее натурального числа n надо посчитать сумму всех чисел, на которые n делится без остатка. Маша не очень любит арифметику, и попросила вас написать программу, которая автоматизирует процесс гадания.

Входные данные: В единственной строке входного файла INPUT.TXT записано натуральное число n ($n \leq 1000$), которое Маша была вынуждена сообщить.

Выходные данные: В выходной файл OUTPUT.TXT выведите сумму всех натуральных делителей числа n .

Примеры

| № | INPUT.TXT | OUTPUT.TXT |
|---|-----------|------------|
| 1 | 6 | 12 |
| 2 | 10 | 18 |

УСЛОЖНИМ ЗАДАЧУ!!!!!!!!!!

Входные данные: В единственной строке входного файла INPUT.TXT записано натуральное число n ($n \leq 10^{10}$), которое Маша была вынуждена сообщить.

Выходные данные: В выходной файл OUTPUT.TXT выведите сумму всех натуральных делителей числа n .

| № | Входные данные | Выходные данные |
|----|----------------|-----------------|
| 1 | 12 | 28 |
| 2 | 239 | 240 |
| 3 | 1234 | 1854 |
| 4 | 6 | 12 |
| 5 | 1000000007 | 1000000008 |
| 6 | 44100 | 160797 |
| 7 | 223092870 | 836075520 |
| 8 | 2147483648 | 4294967295 |
| 9 | 678906 | 1471002 |
| 10 | 1111111 | 1116000 |

| № | Входные данные | Выходные данные |
|----|----------------|-----------------|
| 11 | 9876543210 | 27278469036 |
| 12 | 99460729 | 99470703 |
| 13 | 5988 | 14000 |
| 14 | 1 | 1 |
| 15 | 1348781387 | 1617960960 |
| 16 | 135792 | 406224 |
| 17 | 5402250 | 17041284 |
| 18 | 375844500 | 1259767236 |
| 19 | 1000000000 | 2497558338 |
| 20 | 2357947691 | 2593742460 |

```
#include <iostream>

using namespace std;

int main()
{ int n,i,s=0;
  cin>>n;
  for (i=1;i<=n;i++) {
    if (n%i==0) {
      s=s+i;
    }
  }
  cout << s;
  return 0;
}
```

```
#include <iostream>
using namespace std;
long long n,s,i;
int main ()
{ cin >> n;
  for ( i = 1 ; i*i <= n; i++ ) {
    if ( n%i == 0 ) {
      if (i*i==n) {s = s + i;}
      else
        {s = s + i + n/i;}
    }
  }
  cout << s;
  return 0;
}
```

Задача. Простое или составное

Проверьте, является число n простым или составным.

Входные данные: Вводится одно натуральное число n не превышающее 2000000000 и не равное 1.

Выходные данные:

Необходимо вывести строку `prime`, если число простое, или `composite`, если число составное.

| Входные данные | Выходные данные |
|----------------|-----------------|
| 41 | prime |
| 239 | prime |
| 1234 | composite |
| 659917 | prime |
| 1000100007 | composite |
| 44100 | composite |
| 2147483648 | composite |
| 678901 | prime |
| 1111111 | composite |
| 99460729 | composite |

```
bool pr (long long a)
{ long long i,s=0;

    if (a>=4 && a%2==0){return false;}
    for (i=3;i<=sqrt(a);i=i+2) {
        if (a%i==0) {return false;
        }
    }
    return true;
}
```

Примечание: решение реализовать в виде функции.

Решето Эратосфена

Решето Эратосфена — алгоритм нахождения всех простых чисел от 1 до n .

Основная идея соответствует названию алгоритма: запишем ряд чисел $1, 2, \dots, n$, а затем будем вычеркивать

- сначала числа, делящиеся на 2, кроме самого числа 2,
- потом числа, делящиеся на 3, кроме самого числа 3,
- с числами, делящимися на 4, ничего делать не будем — мы их уже вычёркивали,
- потом продолжим вычеркивать числа, делящиеся на 5, кроме самого числа 5, ...и так далее.

<https://habr.com/ru/articles/333350/>

(по ссылке можно посмотреть как это реально работает)

Код программы (простые до n)

```
cin>>n;
vector<int> prime (n+1, 0);
prime[0] = prime[1] = 1;
for (int i=2; i<=n; i++)
    if (prime[i]==0)
        if (i * i <= n)
            for (int j=i*i; j<=n; j+=i)
                prime[j] = 1;

for (int i=2; i<=n; i++) if (prime[i]==0) cout<<i<<' ';
```

100

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Для решения задач необходимо зарегистрироваться на сайте <https://acmp.ru/>

Задачи указаны с номерами.

42. Драконы

(Время: 1 сек. Память: 16 Мб Сложность: 40%)

Известно, что у дракона может быть несколько голов и его сила определяется числом голов. Но как определить силу драконьей стаи, в которой несколько драконов и у каждого из них определенное число голов? Вероятно, вы считаете, что это значение вычисляется как сумма всех голов? Это далеко не так, иначе было бы слишком просто вычислить силу драконьей стаи. Оказывается, что искомое значение равно произведению значений числа голов каждого из драконов. Например, если в стае 3 дракона, у которых 3, 4 и 5 голов соответственно, то сила равна $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Предположим, что нам известно суммарное количество голов драконьей стаи, как нам вычислить максимально возможное значение силы этого логова драконов? Именно эту задачу Вам и предстоит решить.

Входные данные

В единственной строке входного файла INPUT.TXT записано натуральное число N ($0 < N < 100$) – количество голов драконьей стаи.

Выходные данные

В единственную строку выходного файла OUTPUT.TXT нужно вывести максимально возможное значение силы, которая может быть у стаи драконов из N голов.

Примеры

| № | INPUT.TXT | OUTPUT.TXT |
|---|-----------|------------|
| 1 | 6 | 9 |
| 2 | 8 | 18 |
| 3 | 13 | 108 |

45. Произведение цифр

(Время: 1 сек. Память: 16 Мб Сложность: 42%)

Требуется найти наименьшее натуральное число Q такое, что произведение его цифр равно заданному числу N .

Входные данные

В единственной строке входного файла INPUT.TXT записано одно целое число N ($0 \leq N \leq 10^9$).

Выходные данные

В выходной файл OUTPUT.TXT нужно вывести искомое число Q . В том случае, если такого числа не существует, следует вывести -1.

Примеры

| № | INPUT.TXT | OUTPUT.TXT |
|---|-----------|------------|
| 1 | 10 | 25 |
| 2 | 13 | -1 |
| 3 | 8 | 8 |
| 4 | 90 | 259 |

23. Гадание

(Время: 1 сек. Память: 16 Мб Сложность: 13%)

Как и многие другие девочки, Маша любит разные гадания. Некоторое время назад Маша узнала новый способ гадать на числах – для какого-нибудь интересующего ее натурального числа n надо посчитать сумму всех чисел, на которые n делится без остатка. Маша не очень любит арифметику, и попросила вас написать программу, которая автоматизирует процесс гадания.

Входные данные

В единственной строке входного файла INPUT.TXT записано натуральное число n ($n \leq 1000$), которое Маша была вынуждена сообщить.

Выходные данные

В выходной файл OUTPUT.TXT выведите сумму всех натуральных делителей числа n .

Примеры

| № | INPUT.TXT | OUTPUT.TXT |
|---|-----------|------------|
| 1 | 6 | 12 |
| 2 | 10 | 18 |

354. Разложение на простые множители

(Время: 1 сек. Память: 16 Мб Сложность: 27%)

Требуется вывести представление целого числа N в виде произведения простых чисел.

Входные данные

Входной файл INPUT.TXT содержит натуральное число N ($2 \leq N \leq 2^{31}-1$).

Выходные данные

В выходной файл OUTPUT.TXT выведите список простых множителей числа N в порядке неубывания, разделенных знаком «*».

Примеры

| № | INPUT.TXT | OUTPUT.TXT |
|---|-----------|------------|
| 1 | 5 | 5 |
| 2 | 30 | 2*3*5 |

323. Гипотеза Гольдбаха (проверка на простоту)

(Время: 1 сек. Память: 16 Мб Сложность: 30%)

Известно, что любое чётное число, большее 2, представимо в виде суммы 2 простых чисел, причём таких разложений может быть несколько. Впервые гипотезу о существовании данного разложения сформулировал математик Х. Гольдбах.

Требуется написать программу, производящую согласно утверждению Гольдбаха, разложение заданного чётного числа. Из всех пар простых чисел, сумма которых равна заданному числу, требуется найти пару, содержащую наименьшее простое число.

Входные данные

Входной файл INPUT.TXT содержит чётное число N ($4 \leq N \leq 998$).

Выходные данные

В выходной файл OUTPUT.TXT необходимо вывести два простых числа, сумма которых равна числу N. Первым выводится наименьшее число.

Примеры

| № | INPUT.TXT | OUTPUT.TXT |
|---|-----------|------------|
| 1 | 6 | 3 3 |
| 2 | 992 | 73 919 |

36. Постулат Бертрана (проверка на простоту)

(Время: 1 сек. Память: 16 Мб Сложность: 30%)

Постулат Бертрана (теорема Бертрана-Чебышева, теорема Чебышева) гласит, что для любого $n > 1$ найдется простое число p в интервале $n < p < 2n$. Такая гипотеза была выдвинута в 1845 году французским математиком Джозефом Бертраном (проверившим ее до $n=3000000$) и доказана в 1850 году Пафнутием Чебышевым. Раманужан в 1920 году нашел более простое доказательство, а Эрдеш в 1932 – еще более простое.

Ваша задача состоит в том, чтобы решить несколько более общую задачу – а именно по числу n найти количество простых чисел p из интервала $n < p < 2n$.

Напомним, что число называется простым, если оно делится только само на себя и на единицу.

Входные данные

Входной файл INPUT.TXT содержит целое число n ($2 \leq n \leq 50000$).

Выходные данные

В выходной файл OUTPUT.TXT выведите одно число – ответ на задачу.

Примеры

| № | INPUT.TXT | OUTPUT.TXT |
|---|-----------|------------|
| 1 | 2 | 1 |
| 2 | 239 | 39 |
| 3 | 3000 | 353 |

349. Простые числа (решето)

(Время: 0,5 сек. Память: 64 Мб Сложность: 28%)

Необходимо вывести все простые числа от М до N включительно.

Входные данные

Входной файл INPUT.TXT содержит два натуральных числа М и N, разделенных пробелом ($2 \leq M \leq N \leq 10^6$)

Выходные данные

В выходной файл OUTPUT.TXT выведите все простые числа от М до N в порядке возрастания, по одному в строке. Если таких чисел нет, то следует вывести «Absent».

Примеры

| № | INPUT.TXT | OUTPUT.TXT |
|---|-----------|-------------|
| 1 | 2 5 | 2 3 5 |
| 2 | 4 4 | Absent |